Jochen Weber

Aufgaben zu Geradenscharen

1.0 Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte folgender Geradenscharen in Abhängigkeit von t.

1.1 $f_t(x) = tx - 3t,\ t \in R \setminus \{0\}$

1.2 $f_t(x) = t(2x+1),\ t \in R \setminus \{0\}$

1.3 $f_t(x) = \frac{-3x+2}{t},\ t \in R \setminus \{0\}$

1.4 $f_t(x) = \frac{1}{2}tx - \frac{3}{4}t,\ t \in R \setminus \{0\}$

2.0 Gegeben ist die Geradenschar g_t mit

$$g_t(x) = \frac{1}{3}(t^2-3)(x-t) + \frac{1}{9}(t^2-9),\ x \in R,\ t \in R.$$

2.1 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen g_0 und g_3 in ein Koordinatensystem.

2.2 Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden von g_0 und g_3.

2.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Graphen von g_0 und g_3 und der y-Achse gebildet wird.

2.4 Geben Sie die Schnittpunkte des Graphen von g_3 mit den Koordinatenachsen an.

3.0 Gegeben ist die Geradenschar g_t mit $g_t(x) = -2tx + t^2 + 1,\ x \in R,\ t \in R \setminus \{0\}$.

3.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktionen in Abhängigkeit von t an.

3.2 Geben Sie die y-Achsenabschnitte in Abhängigkeit von t an.

3.3 Bestimmen Sie t so, dass der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse P(0/5) ist.

3.4 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen g_{-1} und g_1 in ein Koordinatensystem.

3.5 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von g_{-1} und g_1.

4.0 Gegeben sind die beiden Punkte P(-1/t) und Q(1/-t) mit $t \in \mathbb{R}$.

4.1 Stellen Sie die Gleichung der Geraden g_t auf, die durch die beiden Punkte P und Q verläuft und beschreiben Sie die Eigenschaften all dieser Geraden.

4.2 Bestimmen Sie den Wert von t, für den die zugehörige Gerade g_t die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten ist.

5.0 Die Gleichung $f_m(x) = mx - m + 2$ mit dem Parameter $m \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ legt ein Geradenbüschel fest.

5.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Büschelpunktes.

5.2 Berechnen Sie den Wert von m, für den die zugehörige Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft.

5.3 Zeichnen Sie für m = 2, für m = 0 und für m = -0,5 die zugehörigen Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem.

5.4 Wählen Sie zwei Geraden aus der Schar aus, die senkrecht zueinander verlaufen und geben Sie deren Gleichungen an.

5.5 Geben Sie in Abhängigkeit von m die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der x- und der y-Achse an.

6 Alle Geraden einer Geradenschar schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems mit den Achsen ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt 8 Flächeneinheiten ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Geradenschar.

7.0 Eine Parallelenschar ist durch die Gleichung $f_t(x) = \frac{1}{2}x - t + 1$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $D_{f_t} = \mathbb{R}$ gegeben.

7.1 Geben Sie den Wert von t an, für den die zugehörige Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems geht.

7.2 Berechnen Sie allgemein die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

7.3 Bestimmen Sie die Gleichung einer Parallelenschar, die immer senkrecht zu den Geraden der gegebenen Parallelenschar verläuft.

7.4 Berechnen Sie allgemein die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden zueinander senkrechten Geradenscharen.

8.0 Der Punkt B(-1/2) soll Büschelpunkt eines Geradenbüschels sein.

8.1 Stellen Sie die zugehörige Gleichung des Geradenbüschels auf und weisen Sie rechnerisch nach, dass B auf allen Geraden liegt.

8.2 Geben Sie die Koordinaten aller Punkte an, die auf keiner Geraden des Büschels mit der Gleichung $y = mx + m + 2$ liegen. Begründen Sie Ihre Antwort.

8.3 Bestimmen Sie alle Werte von m, für die der Abstand der zugehörigen x- und y-Achsenschnittpunkte zum Ursprung gleich sind.

9.0 Gegeben ist die Funktion f_m durch die Gleichung $f_m(x) = mx - 2m + 1$ mit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$.

9.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B, der auf allen Geraden der Schar liegt.

9.2 Berechnen Sie allgemein die Nullstelle von f_m und bestimmen Sie den Wert von m, für den die zugehörige Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft.

9.3 Bestimmen Sie den Wert von m, für den die zugehörige Gerade senkrecht zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 2$ verläuft und berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der beiden Geraden.

9.4 Erstellen Sie eine Gleichung eines Geradenbüschels, dessen Geraden durch den Punkt P(0/1) verlaufen und für jeden Wert von $m \neq 0$ parallel zu den Geraden von f_m sind.

9.5 Zeichen Sie die Graphen der Funktionen f_{-2}, f_{-1}, f_1 und f_2 in ein gemeinsames Koordinatensystem.

10.0 Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung an.

10.1 Die zugehörige Gerade schneidet die y-Achse im positiven Bereich und die x-Achse an der Stelle x = 2.

10.2 Die zugehörige Gerade verläuft nur durch den I. und II. Quadranten.

10.3 Die zugehörige Gerade verläuft nur durch den I. und III. Quadranten.

10.4 Die zugehörige Gerade schneidet die x-Achse an der Stelle x = -2 und hat keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

11 Bei einem Rechteck verhalten sich die Längen der Seiten wie 5:2. Der Umfang des Rechtecks beträgt 35 cm.
Berechnen Sie die Maße des Rechtecks.

12.0 Erkan liegt im Krankenhaus und erhält eine Langzeitinfusion. Die verabreichte Infusionsmenge muss schriftlich dokumentiert werden.
Das Messgerät an der Infusionsflasche zeigt die verstrichene Zeit und die noch in der Flasche vorhandene Infusionsmenge an. Die Krankenschwester notiert folgende Werte.

Zeit t in min	30	60	90	120	150
Flascheninhalt I in cm^3	800	650	500	350	200

12.1 Übertragen Sie die Werte in ein geeignetes Koordinatensystem.

12.2 Untersuchen Sie, ob ein linearer Zusammenhang zwischen der Zeit t und dem Flascheninhalt I vorliegt und bestimmen Sie gegebenenfalls die Funktionsgleichung.

12.3 Berechnen Sie mithilfe der Funktionsgleichung den Flascheninhalt nach einer Zeit von 45 Minuten.

12.4 Ermitteln Sie, nach wie vielen Minuten der Flascheninhalt 220 cm^3 beträgt und überprüfen Sie das Ergebnis mithilfe des Graphen.

13.0 Für einen Klassenausflug zu einem Spielpark stehen zwei Angebote zur Auswahl. Die Kosten gelten dabei jeweils für die gesamte Gruppe (maximal 25 Personen):
A1: 65 € Grundgebühr und 40 Cent pro Minute.
A2: Die ersten 30 Minuten kosten 50 €. Danach werden je angefangene 30 Minuten 20 € berechnet.

13.1 Erstellen Sie eine Wertetabelle für Angebot A1.
Zeichnen Sie die zugehörige Gerade.

13.2 Erstellen Sie eine Wertetabelle für Angebot A2.

13.3 Erläutern Sie, warum Angebot A2 nicht durch eine Gerade dargestellt werden kann und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.

13.4 Untersuchen Sie, bei welcher Aufenthaltsdauer der Besuch bei beiden Angeboten 110 € kostet.

13.5 Bestimmen Sie, für welche Aufenthaltsdauer das Angebot A1 günstiger als das Angebot A2 ist.

14.0 Beim Sommerfest der Tageseinrichtung „Abenteuerwelt“ wird das neue zylinderförmige Planschbecken für die großen Kinder eingeweiht. Es hat einen Durchmesser von 2,40 m und die Seitenwände sind 75 cm hoch.
Die Praktikantin Samira soll dafür sorgen, dass bis zum Festbeginn um 15:00 Uhr das Becken bis 15 cm unter den Rand mit Wasser gefüllt ist. Dafür steht ihr ein Wasserschlauch zur Verfügung, mit dem pro Minute 12,5 l Wasser eingelassen werden können.

14.1 Berechnen Sie die benötigte Wassermenge.

14.2 Geben Sie die Gleichung einer Funktion f an, die die eingefüllte Wassermenge in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit darstellt.

14.3 Prüfen Sie durch Rechnung, ob es ausreicht, wenn Samira um 12:00 Uhr mit dem Befüllen des Planschbeckens beginnt.

15.0 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungen in Abhängigkeit von a.

15.1 $\frac{1}{3}(3ax-2)=3x+1$

15.2 $ax+2=\frac{1}{2}(4x-a)$

15.3 $2ax=6a-24a^2$

Lösungen

1.1 Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle): Ansatz: y = 0

$tx-3t=0 \Rightarrow tx=3t \Rightarrow x=3 \Rightarrow N(3/0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: Ansatz: x = 0

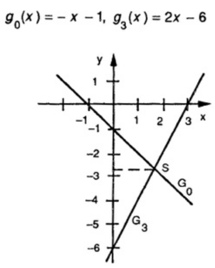
$y=t\cdot 0-3t=-3t \Rightarrow S_y(0/-3t)$

1.2 N(-0,5/0) $S_y(0/t)$

1.3 $N(\frac{2}{3}/0)$ $S_y(0/\frac{2}{t})$

1.4 $N(\frac{3}{2}/0)$ $S_y(0/-\frac{3}{4}t)$

2.1



2.2 Ansatz: $g_0(x) = g_3(x)$

$-x-1=2x-6 \Rightarrow 5=3x \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$y=-\frac{5}{3}-1=-\frac{8}{3} \Rightarrow S(\frac{5}{3}/-\frac{8}{3})$

2.3 $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h \Rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{6}FE$

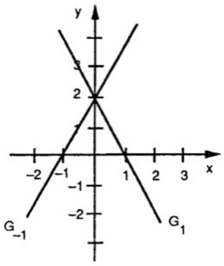
2.4 N(3/0) $S_y(0/-6)$

3.1 $g_t(x)=0 \Rightarrow -2tx+t^2+1=0 \Rightarrow x=\frac{t^2+1}{2t}$

3.2 $y=t^2+1$

3.3 $t^2+1=5 \Rightarrow t^2=4 \Rightarrow t=\pm 2$

3.4 $g_{-1}(x) = 2x + 2 \quad g_1(x) = -2x + 2$



3.5

$2x + 2 = -2x + 2 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow S(0/2)$

4.1

$m = \dfrac{-t - t}{1 - (-1)} = -t \quad \Rightarrow g_t(x) = -tx + b$

$P(-1/t)$ einsetzen: $t = -t(-1) + b \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow g_t(x) = -tx$

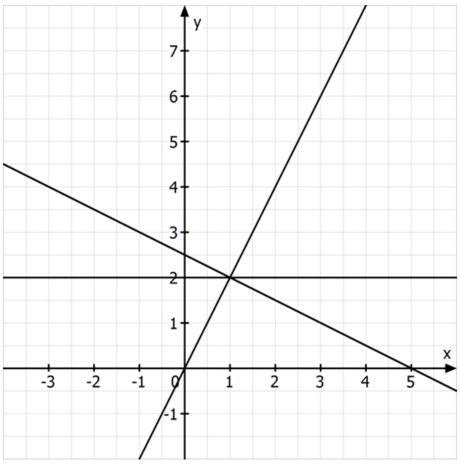
Die Geraden verlaufen alle durch den Ursprung.

4.2 $m = 1 \Rightarrow -t = 1 \Rightarrow t = -1$

5.1 $f_0(x) = f_1(x) \Rightarrow 2 = x + 1 \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow B(1/2)$

5.2 $0 = m \cdot 0 - m + 2 \Rightarrow m = 2$

5.3



5.4

$m_1 \cdot m_2 = -1$

Wähle $m_1 = 1 \quad \Rightarrow f_1(x) = x + 1$

$\Rightarrow m_2 = -1 \quad \Rightarrow f_{-1}(x) = -x + 3$

5.5

$S_y(0/-m+2)$ für alle $m \in \mathbb{R}$

$mx-m+2=0 \Rightarrow mx=m-2 \Rightarrow x=\frac{m-2}{m}$ für $m \neq 0 \Rightarrow N(\frac{m-2}{m}/0)$

$m=0$: Die Gerade hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse

6

$y=mx+t$

$S_y(0/t) \quad S_x(-\frac{t}{m}/0)$ für $m \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot t\cdot\left(-\frac{t}{m}\right)=8 \Rightarrow -\frac{t^2}{m}=16 \Rightarrow m=-\frac{t^2}{16}$

$\Rightarrow f_t(x)=-\frac{t^2}{16}\cdot x+t \quad t \in \left]0;\infty\right]$

7.1 $\frac{1}{2}\cdot 0-t+1=0 \Rightarrow t=1$

7.2

$S_y(0/-t+1)$

$\frac{1}{2}x-t+1=0 \Rightarrow x=2t-2 \Rightarrow N(2t-2/0)$

7.3

$m_1\cdot m_2=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m_2=-1 \Rightarrow m_2=-2$

$\Rightarrow g_t(x)=-2x+t$

7.4

$\frac{1}{2}x-t+1=-2x+t \Rightarrow 2{,}5x=2t-1 \Rightarrow x=0{,}8t-0{,}4$

$y=-2\left(0{,}8t-0{,}4\right)+t=-0{,}6t+0{,}8$

$\Rightarrow S(0{,}8t-0{,}4/-0{,}6t+0{,}8)$

8.1

$y=mx+t$

$B(-1/2)$ einsetzen: $2=-m+t \Rightarrow t=2+m$

$\Rightarrow g_m(x)=mx+2+m$

$\Rightarrow 2=m\cdot\left(-1\right)+2+m \Rightarrow 2=2\,(w)$

8.2 $P(-1/y_P)$ mit $y_P \neq 2$

8.3

$S_y(0/m+2)$

$mx+m+2=0 \quad \Rightarrow mx=-m-2 \quad \Rightarrow x=\dfrac{-m-2}{m}$ für $m \neq 0$

$\Rightarrow 1)\ m+2=\dfrac{-m-2}{m} \quad \Rightarrow m^2+2m=-m-2 \quad \Rightarrow m^2+3m+2=0$

$\Rightarrow m_1=-1 \quad m_2=-2$

$\Rightarrow 2)\ m+2=\dfrac{m+2}{m} \quad \Rightarrow m^2+2m=m+2 \quad \Rightarrow m^2+m-2=0$

$\Rightarrow m_1=1 \quad m_2=-2$

9.1 $f_0(x)=f_1(x) \quad 1=x-1 \quad \Rightarrow x=2 \quad \Rightarrow B(2/1)$

9.2

$mx-2m+1=0 \quad \Rightarrow x=\dfrac{2m-1}{m}$ für $m \neq 0$

$m\cdot 0-2m+1=0 \quad \Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$

9.3

$m_1 \cdot m_2=-1 \quad \Rightarrow 2\cdot m_2=-1 \quad \Rightarrow m_2=-\dfrac{1}{2}$

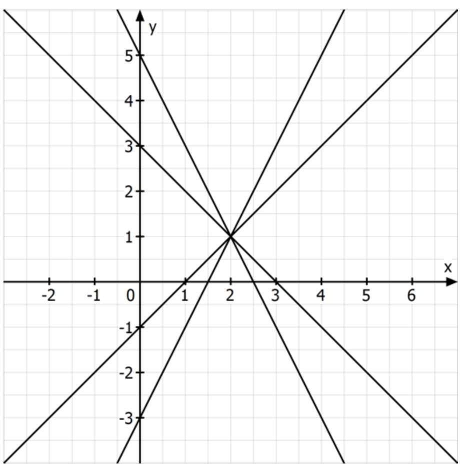
$2x+2=-\dfrac{1}{2}x+2 \quad \Rightarrow 2{,}5x=0 \quad \Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow y=2 \quad \Rightarrow SP(0/2)$

9.4

$y=mx+t$ $P(0/1)$ einsetzen

$\Rightarrow y=mx+1$

9.5



10.1

$y = mx + t$

$N(2/0)$ einsetzen: $0 = 2m + t \quad \Rightarrow t = -2m$

$\Rightarrow y = mx - 2m \quad \text{mit } m < 0$

10.2 $y = t \;\text{ mit } t > 0$

10.3 $y = mx \quad \text{mit } m > 0$

10.4 $x = -2$

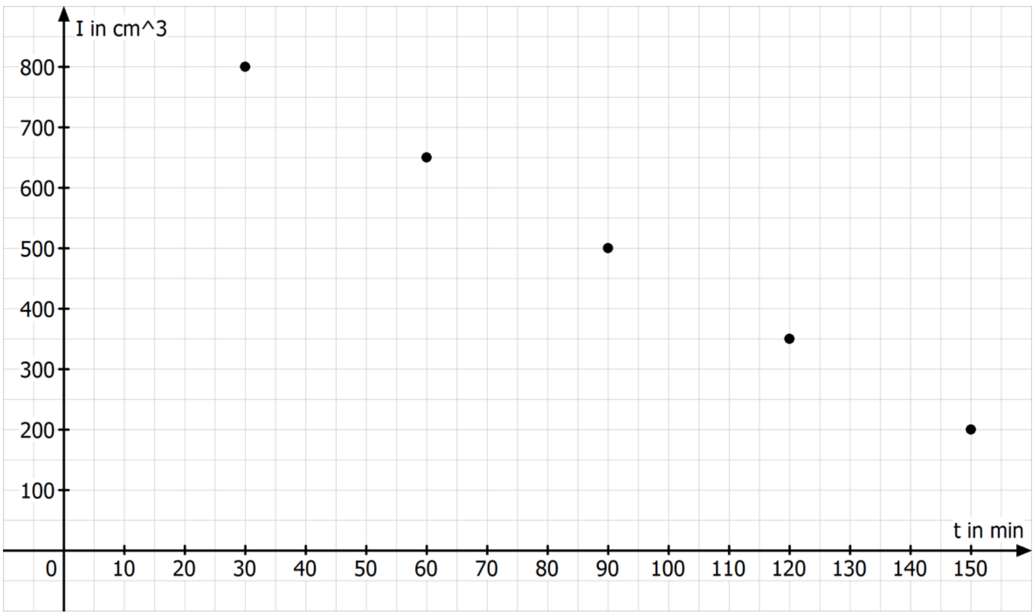
11 Ansatz:

(I) $\frac{x}{y} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}y$

(II) $2x + 2y = 35$

$x \text{ in (II)}: 2 \cdot \frac{5}{2}y + 2y = 35 \Rightarrow 7y = 35 \Rightarrow y = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{2} \cdot 5 = 12{,}5$

12.1



12.2

Aufstellen einer Funktionsgleichung mithilfe der Punkte A und B:

$m = \frac{650 - 800}{60 - 30} = -5$

Einsetzen von A: $800 = -5 \cdot 30 + t \quad \Rightarrow t = 950$

$\Rightarrow I(t) = -5t + 950$

Punktprobe mit den Punkten C(90|500), D(120|350) und E(150|200)

12.3

$I(45) = 725$

Nach 45 Minuten sind noch 725 cm^3 in der Flasche.

12.4

$220 = -5t + 950 \quad \Rightarrow 5t = 730 \quad \Rightarrow t = 146$

Nach 146 Minuten befinden sich noch 220 cm^3 in der Flasche.

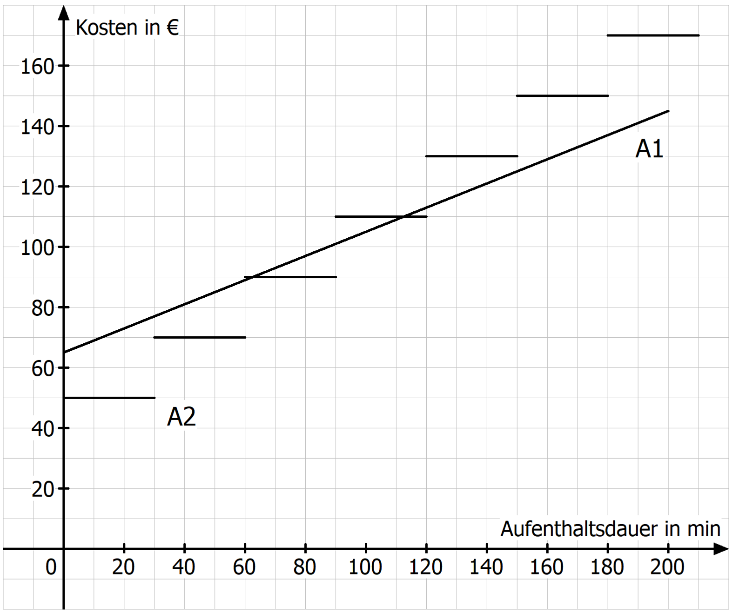
13.1

Aufenthaltsdauer in min	0	40	80	120	160	200
Kosten in €	65	81	97	113	129	145

13.2

Aufenthaltsdauer in min	0	40	80	120	160	200
Kosten in €	50	70	90	110	150	170

13.3 Es gibt alle 30 Minuten einen Preissprung und innerhalb von jeweils 30 Minuten bleibt der Preis gleich.



13.4

Kosten von Angebot A1: $f(x) = 0,4x + 65$

$\Rightarrow 0,4x + 65 = 110 \quad \Rightarrow x = 112,5$

Bei Angebot A1 kann man sich 112,5 Minuten im Spielpark aufhalten,

bei Angebot A2 120 Minuten.

13.5

$0,4x + 65 = 90 \quad \Rightarrow x = 62,5$

$\Rightarrow$ Das Angebot A1 ist günstiger zwischen 60 und 62,5 Minuten,

zwischen 90 und 112,5 Minuten und über 120 Minuten.

14.1

$$V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h = (12)^2 \cdot \pi \cdot 6 = 2714{,}34\ dm^3$$

Es werden etwa 2714,34 Liter Wasser benötigt.

14.2 $f(x) = 12{,}5x \quad x \text{ in Minuten}$

14.3

$$12{,}5x = 2714{,}34 \quad \Rightarrow x = 217{,}15 \text{ Minuten} \ \ (3{,}62 \text{ Stunden})$$

Es reicht nicht aus, wenn Samira um 12:00 Uhr mit dem Befüllen beginnt.

15.1

$$\frac{1}{3}(3ax-2) = 3x+1 \Rightarrow ax - \frac{2}{3} = 3x+1 \Rightarrow ax - 3x = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow (a-3)x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3(a-3)}$$

$$a \neq 3 : L = \left\{ \frac{5}{3(a-3)} \right\} \qquad a = 3 : L = \{ \ \}$$

15.2

$$ax + 2 = \frac{1}{2}(4x-a) \Rightarrow ax+2 = 2x - \frac{1}{2}a \Rightarrow ax - 2x = -\frac{1}{2}a - 2$$

$$\Rightarrow (a-2)x = -\frac{1}{2}a - 2 \Rightarrow x = \frac{-\frac{1}{2}a-2}{a-2}$$

$$a \neq 2 : L = \left\{ \frac{-\frac{1}{2}a-2}{a-2} \right\} \qquad a = 2 : L = \{ \ \}$$

15.3

$$2ax = 6a - 24a^2 \ \Rightarrow x = 3 - 12a$$

$$a \neq 0 : L = \{3-12a\} \quad a = 0 : L = R$$